Приложение 1. Примеры, показывающие актуальность проблемы

Замечание. Мы не решаем уравнение , потому что , где левая часть существует, а правая часть не определена (в уравнении нет ограничений для x, и оно может принимать рациональные значения!). Однако, мы решаем уравнение , где заране задано, что n-число целое (операция возведения в рациональную степень и натуральную степень разный! Вспомним, кстати, что , т.к. левая часть существует, а правая - нет).

Пример 9. Решите уравнение .

ОДЗ: .

в ОДЗ

Корни -1, -2 не входят в ОДЗ. Это не смотря на то, что

*.*

Ответ: .

**Содержание:**

1. Введение
2. Характеристика операции возведения отрицательного числа в дробную степень
   1. Причины отбрасывания операции возведения отрицательного числа в дробную степень
   2. Правила возведения отрицательного числа в дробную степень во множестве действительных чисел
3. Роль показателя дробной степени в операции
   1. Три класса дробных показателей степеней несократимых на "2"
   2. "Хорошие" и "плохие" дробные показатели степеней, сложение и умножение классов
   3. Примеры, показывающие актуальность проблемы
4. Заключение
5. Список литературы

Приложение 1. Примеры, показывающие актуальность проблемы

КОМИТЕТ ПО ОБРАЗОВАНИЮ

АДМИНИСТРАЦИИ ГОРОДСКОГО ОКРУГА "ГОРОД КАЛИНИНГРАД"

**Открытая XXI ученическая научно-практическая конференция**

**"Поиск и творчество"**

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИКИ

**Операция возведения отрицательного числа в дробную степень во множестве действительных чисел**

Исследовательская работа

Выполнена ученицей

9 класса МАОУ гимназии № 32

г. Калининграда

Капрановой Софьи Алексеевны

Научный руководитель:

профессор

БФУ им. И. Канта

Юрий Иванович Шевченко

Калининград

2014

**1. Введение**

Операция возведения отрицательного числа в дробную степень невозможна по определению школьных учебников, т.к. в школьных учреждениях при переходе от целой к дробной степени из методических соображений полной определенности операции и ее однозначности ограничиваются положительными основаниями, объясняя это тем, что результат при возведении отрицательного числа в дробную степень может оказаться числом, не входящим во множество действительных чисел, и он зависит от того, является ли показатель степени сократимой на 2 дробью или нет. Актуальность данной проблемы обусловлена тем, что следуя такими жесткими методами, сужаются множество вещественных решений степенно-показательных и логарифмических уравнений, т.е. при решении степенно-показательных уравнений отбрасываются реально существующие корни.

Гипотеза. Существует определенный алгоритм, следуя которому, можно проводить операцию возведения отрицательного числа в дробную степень в множестве действительных чисел.

Цель исследования: Доказать, что операция возведения отрицательного числа в дробную степень возможна во множестве действительных чисел и выведение алгоритма возведения отрицательного числа в дробную степень во множестве действительных чисел позволит расширить множество вещественных решений степенно-показательных и логарифмических уравнений.

Задачи исследования:

1. Определить противоречия, с которыми сталкиваются при возведении отрицательного числа в дробную степень, и найти способы их разрешения.
2. Выяснить, при каких значениях дробных степеней операция возведения отрицательного числа в дробные степени является определенной, а при каких - нет .
3. Разбить дробные степени на классы в зависимости от четности числителя и знаменателя и провести операции сложения и умножения этих классов с занесением результатов в квадраты Кэли для сложения и умножения.
4. Вывести алгоритм возведения отрицательного числа в дробную степень во множестве действительных чисел.

Методы исследования:

* теоретический анализ
* изучение научной литературы
* сравнение
* вычисление

**2. Характеристика операции возведения отрицательного числа в дробную степень**

2.1 Причины отбрасывания операции возведения отрицательного числа в дробную степень

Представим примеры, наглядно показывающие причины, из-за которых избегают осуществлять операцию возведения отрицательного числа в дробную степень.

Пример 1. Возведем число -1 в степень обычным образом, т.е. произведем ту же операцию, что и с положительным числом:

В результате получилась -1, т.к. при извлечении корня нечетной степени из отрицательного числа получается отрицательное число.

Теперь возведем то же число в степень :

В результате данной операции получаются два корня, т.к. корень четной степени из положительного числа имеет два значения в области вещественных чисел. Отметим, что знак "+" соответствует арифметическому корню, а знак "-" соответствует другому корню.

Из (1) и (2) видно, что при возведении одного и того же числа (-1) в степени и , мы получаем разные результаты:

-1 ≠ 1

Из этого можно сделать вывод, что показатели степеней, в которые мы возводили одно и то же число, не равны:

Но это противоречит тому, что дробь равна . Поэтому, при переходе от целой степени к дробной, обычно ограничиваются положительными основаниями, для избежания противоречий.

Кроме того, невозможно определить данную операцию во множестве вещественных чисел для всех дробей.

Пример 2. Возведем -1 в степень :

В результате получается мнимая единица т.е. результат данной операции не принадлежит множеству действительных чисел:

Следовательно, если удастся определить данную операцию во множестве действительных чисел, то эта операция будет частично-определенной, поэтому данную операцию обычно и отбрасывают. Но мы ведь не отбрасываем операцию деления, хотя она тоже является частично-определенной операцией, потому что на ноль мы обычно не делим. Кроме этого результат зависит от того, является ли дробный показатель степени сократимым на два или нет, что уже показано.

2.2 Правило возведения отрицательного числа в дробную степень во множестве действительных чисел

Для возведения положительного числа в дробную степень нужно основание степени возвести степень в числителя дроби, которая является показателем степени, и извлечь из этого корень степени, равной знаменателю данной дроби, при том, что числитель этой дроби принадлежит множеству целых чисел, а знаменатель - множеству натуральных чисел:

Для возведения отрицательного числа в дробную степень необходимо:

* 1. отрицательное число представить в виде произведения модуля этого числа и -1, т.е. наша операция сводится к возведению отрицательной единицы в дробную степень:

,

* 1. чтобы дробный показатель степени был несократим на два.

Действительно, для преодоления противоречия, возникшего в первом примере, нужно дробный показатель степени сократить на 2. У нас получится , и тогда ответы совпадут.

Вывод. Перед возведением отрицательного числа в дробную степень, нужно дробный показатель степени сокращать на 2 до тех пор, пока и числитель и знаменатель не смогут делиться на 2 без остатка, а затем можно воспользоваться обычным правилом возведения положительного числа в дробную степень.

**3. Роль показателя дробной степени в операции**

3.1 Три класса несократимых на два дробных показателей степеней

Рассмотрены возможные варианты значения дробных степеней, т.е. когда числитель и знаменатель являются четными или не четными числами.

1. Возведем отрицательное число в дробную степень, где числитель является четным числом, а знаменатель - нечетным:

(k Z, n N).

В результате получено положительное число.

2. Возведем отрицательное число в дробную степень, где и числитель и знаменатель являются нечетными числами:

().

В результате получено отрицательное число

3. При возведении отрицательного числа в дробную степень, где числитель является нечетным числом, а знаменатель - четным:

В результате этой операции получено число, не принадлежащее множеству действительных чисел.

Таким образом, несократимые на 2 дроби можно разделить на 3 класса: "класс α", "класс β" и "класс γ". К классу α принадлежат все дроби, у которых числитель - четное число, а знаменатель - нечетное: . К классу β будут относятся все дроби, у которых и числитель и знаменатель - нечетные числа: . А к классу γ принадлежат все дроби, у которых числитель - нечетное число, а знаменатель - четное:

3.2 "Хорошие" и "плохие" дробные показатели степеней, сложение и умножение классов

Теперь введем понятия "плохие" и "хорошие" дроби. Хорошие дроби - это такие дроби, при возведении отрицательных чисел в которых в результате получаются числа, принадлежащие множеству действительных чисел. Хорошими дробями являются дроби, принадлежащие классам α и β. Плохие дроби - это те дроби, при возведении отрицательных чисел в которые, в результате получаются мнимые числа, которые не являются действительными. Плохими дробями являются дроби, принадлежащие классу γ. Стоит отметить, что у хороших дробей знаменатель является нечетным числом, а у плохих дробей - четным.

Проведем операции сложения и умножения этих классов, а результаты данных занесены в квадраты Кэли для сложения и умножения. В ходе проведения данных операций используем свойства четных и нечетных чисел:

* при сложении двух четных чисел получается четное число
* при сложении четного и нечетного числа получается нечетное число
* при сложении двух нечетных чисел получается четное число
* при произведении двух четных чисел получается четное число
* при произведении четного числа и нечетного получается четное число
* при произведении двух нечетных чисел получается нечетное число

1. Операции сложения классов.

Для сложения двух дробей с разными знаменателями, необходимо привести данные дроби к общему знаменателю. Для этого нужно числитель и знаменатель каждой дроби умножить на знаменатель другой дроби.

1)

В результате сложения двух дробей класса получилась дробь того же класса, класса .

Аналогично складываем остальные классы:

2)

В результате сложения двух дробей классов и получилась дробь, принадлежащая классу .

3)

В результате сложения двух дробей классов и получилась дробь, принадлежащая классу .

4)

В результате сложения двух дробей класса получилась дробь, принадлежащая классу .

5)

В результате сложения двух дробей классов  и получилась дробь, принадлежащая классу .

6)

В результате сложения двух дробей одного класса получилась неопределенная дробь, дробь, которая сократима.

Знак вопроса (?) обозначает дробь, которая сократима на 2.

*Пользуясь....*

Квадрат Кэли для сложения

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **+** |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  | ? |

2. Операция умножения классов.

1)

В результате умножения дробей класса , получилась дробь, принадлежащая классу .

Таким же образом перемножаем остальные классы:

2)

В результате умножения дроби классов  и получилась дробь, принадлежащая классу .

3)

В результате умножения дроби классов  и получилась неопределенная дробь.

4)

В результате умножения дробей класса , получилась дробь, принадлежащая классу

5)

В результате умножения дроби классов  и получилась дробь, принадлежащая классу .

6)

В результате умножения дробей класса , получилась дробь, принадлежащая классу .

*Используя...*

Квадрат Кэли для умножения

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  | ? |
|  |  |  |  |
|  | ? |  |  |

По полученным квадратам Кэли можно увидеть, что дроби, принадлежащие классу γ, называются плохими не только потому, что, когда возводятся отрицательные числа в дроби, принадлежащие этому классу, получаются числа, не принадлежащие множеству действительных чисел, но и потому, что, при произведении операции сложения и умножения с этими дробями, получаются такие же плохие дроби или неопределенные дроби, т.е. сократимые на 2.

Используя данную информацию и свойства степеней, можно производить операции умножения степеней с одинаковыми основаниями и разными дробными показателями степеней. В этом случае, дробные показатели степеней будут складываться. В дробь, полученную в результате сложения этих двух дробей, возводится отрицательное число, являющееся общим основанием степеней. При возведении степени с отрицательным основанием и дробным показателем в дробную степень, дроби будут перемножаться между собой. Эти свойства распространены на степени с отрицательными основаниями при условии их определенности.

3.3 Примеры, показывающие актуальность проблемы

Под грифом "Министерство образования и науки Российской Федерации Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение дополнительного образования детей «Заочная физико-техническая школа Московского физико-технического института (государственного университета)»" предлагают решение двух примеров, которые сейчас будут нами рассмотрены. (см Приложение)

1. В замечании первого примера утверждается, что , т.к. левая часть существует, а правая - нет. Но, согласно правилу возведения отрицательного числа в дробною степень во множестве действительных чисел (если дробный показатель степени несократим на 2, а сама дробь является хорошей, то при возведении отрицательного числа в эту дробь в результате получается действительное число), можно убедиться в несправедливости утверждения, написанного в замечании.

Рассмотрим степень:

1) - несократимая на 2 дробь,

2) классу β, т.е. эта дробь хорошая.

Из (1) и (2) можно сделать вывод, что существует во множестве действительных чисел

= = = -2,

Отсюда следует, что =

2. Во втором примере предлагают решение уравнения

(\*)

где вводят ОДЗ (область доступных значений): . В ходе решения данного уравнения находятся три корня -1, -2 и 1. Два корня с отрицательным значением отбрасывают, объясняя тем, эти корни не входят в ОДЗ, и в ответ вносят только один положительный корень не смотря на то, что отброшенные корни удовлетворяют равенству :

1) При x = -1 левая и правая часть уравнения принимают следующий вид:

*,*

.

Значит

Следовательно -1 удовлетворяет уравнению (\*).

2) при x = -2 имеем:

,

б) .

Значит

.

Следовательно, -2 удовлетворяет уравнению (\*).

Существующая ОДЗ введена лишь из-за того, что в настоящее время по учебной программе не решают степенно-показательные уравнения с отрицательными основаниями. Поэтому, если расширить ОДЗ, то можно получит еще два реальных решения. Более того, в результате действующих правил по операции возведения числа в дробную степень опускаются решения степенно-показательных уравнений с отрицательным основанием даже в случае натуральных показателей.

Составим алгоритм, следуя которому можно, возводя отрицательное число в дробную степень, получить вещественный результат.

**Алгоритм возведения отрицательного числа в дробную степень во множестве действительных чисел**

1. Определить, сокращается ли дробная степень на 2, в которую возводиться отрицательное число. Если нет, то переходить ко второму шагу. Если да, делить дробь на 2 до тех пор, пока и числитель и знаменатель не будут делиться на 2 без остатка. После этого переходить ко второму шагу.
2. Установить, является ли знаменатель дроби нечетным. Если да, то переходить к третьему шагу. Если нет, то объявить, что операция является неопределенной.
3. Использовать правило, применяемое при положительных основаниях.

Вывод Возведение отрицательного числа в дробную степень определено во множестве действительных чисел, когда показатель есть дробь с нечетным знаменателем. Для нахождения результата операции нужно: а) если необходимо сократить на 2 показатель; б) если в знаменателе оказалось нечетное число, то воспользоваться правилом, применяемым при положительных основаниях; в) если в знаменателе - четное число, то операция не определена. Выведенный алгоритм дает возможность расширять множество вещественных решений степенно-показательных уравнений.

**4. Заключение**

В ходе осуществления исследования были найдены решения поставленных задач и подтверждена выдвинутая гипотеза.

Действительно, существует определенный алгоритм, следуя которому, можно проводить операцию возведения отрицательного числа в дробную степень в множестве действительных чисел.

Ответы на задачи исследования:

1. Противоречия, с которыми сталкиваются при возведении отрицательного числа в дробную степень, заключается в том, что при возведении отрицательного числа в равные дроби (например и ), где одна является несократимой на 2 дробью, а вторая - сократимой, ответы не соответствуют друг другу. Способ разрешения данного противоречия: сокращать на 2 дробь, у которой и числитель и знаменатель - четные числа, до тех пор, пока и числитель и знаменатель не будут делиться на 2 без остатка.
2. Операция возведения отрицательного числа в дробные степени является определенной, если знаменатель дробного показателя степени является нечетным, а если знаменатель дробного показателя степени является четным, то операция является неопределенной.
3. Дробные показатели степени делятся на три класса: , и . Были проведены операции сложения и умножения этих классов и определены свойства хороших и плохих дробей.
4. Выведен алгоритм возведения отрицательного числа в дробную степень во множестве действительных чисел.

**5. Список литературы**

1. Выгодский М. Я. "Справочник по элементарной математике". М., 1978
2. Шахно К. У. "Элементарная математика для окончивших среднюю школу". Л., 1976
3. Новоселов С. И. "Специальный курс элементарной математики". М., 1965
4. Шиханович Ю. А. "Введения в современную математику". М., 1965

Тезисы

1. Существуют две причины, из-за которых отбрасывается операция возведения отрицательного числа: 1) невозможно определить данную операцию во множестве вещественных чисел для всех дробей; 2) результат зависит от того, является ли дробный показатель степени сократимым на два или нет.

2. Перед возведением отрицательного числа в дробную степень, нужно дробный показатель степени сокращать на 2 до тех пор, пока и числитель и знаменатель не смогут делиться на 2 без остатка, а затем можно воспользоваться обычным правилом возведения положительного числа в дробную степень

3. Влияние дробных показателей степеней на результат самой операции такого, что: 1) если показатель степени есть дробь с нечетным знаменателем, то операция является определенной; 2) если знаменатель - четное число, то операция является неопределенной.

4. Несократимые на 2 дроби были делятся на классы: , , ,

где дроби классов и являются "хорошими" дробями, т.е. дробями, при возведении отрицательных чисел в которые в результате получаются действительные числа. Дроби класса - "плохие" дроби, т.к. при возведении в них отрицательных чисел получаются мнимые числа. В отличие от хороших дробей, при произведении операции сложения и умножения с плохими дробями, получаются плохие дроби или неопределенные дроби.

5. Составлены квадраты Кэли для сложения и умножения этих классов, из которых видна замкнутость множества , что позволяет распространить свойства степеней с положительными основаниями на степени с отрицательными основаниями при условии их определенности.

6. Выведен алгоритм возведения отрицательного числа в дробную степень во множестве действительных чисел, что позволяет расширить множество вещественных решений степенно-показательных и логарифмических уравнений.

(Аннотация)

***Капранова Софья Алексеевна***

МАОУ гимназия № 32, 9 класс

**"Операция возведения отрицательного числа в дробную степень во множестве действительных чисел"**

Операция возведения отрицательного числа в дробную степень невозможна по определению школьных учебников, т.к. при переходе от целой к дробной степени из методических соображений полной определенности операции и ее однозначности ограничиваются положительными основаниями.

В работе рассмотрены причины, из-за которых отбрасывается операция возведения отрицательного числа. Использованы противоречия, с которыми сталкиваются при представлении данной операции и условия, при которых операция была бы определенной и неопределенной.

Установлено влияние дробных показателей степеней на результат самой операции. Для этого несократимые на 2 дроби были разделены на три класса: , , . Составлены квадраты Кэли для сложения и умножения этих классов, из которых видна замкнутость множества хороших дробей из классов α и β.

Показано, что операция возведения отрицательного числа в дробную степень возможна во множестве действительных чисел, и выведен алгоритм частично определенного возведения отрицательных чисел в дробные степени, что позволяет расширить множество вещественных решений степенно-показательных и логарифмических уравнений.

Научный руководитель: Шевченко Ю. И., профессор БФУ им. И. Канта